

کد کنترل

892

A

عصر پنج‌شنبه  
۱۴۰۳/۱۲/۰۲



«علم و تحقیق، کلید پیشرفت کشور است.»  
مقام معظم رهبری

دفترچه شماره ۳ از ۳

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های دکتری (نیمه‌متمرکز) – سال ۱۴۰۴  
علوم کامپیوتر و بیوانفورماتیک (کد ۲۲۴۷)

تعداد سؤال: ۹۰ سؤال  
مدت زمان پاسخگویی: ۱۳۵ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

| ردیف | مواد امتحانی   | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره |
|------|--|------------|----------|----------|
| ۱    | ساختمان داده و الگوریتم – مبانی منطق – مبانی ترکیبیات – جبر خطی عددی                 | ۳۵         | ۱        | ۳۵       |
| ۲    | نظریه الگوریتم پیشرفته   | ۱۰         | ۳۶       | ۴۵       |
| ۳    | زیست‌شناسی سلولی و مولکولی – آمار و احتمال – ساختمان داده و الگوریتم – ریاضیات گسسته | ۴۵         | ۴۶       | ۹۰       |

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات کادر زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخنامه ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

ساختمان داده و الگوریتم - مبانی منطق - مبانی ترکیبیات - جبر خطی عددی:

۱- جواب رابطه بازگشتی  $T(n) = 2^n T(n-1)$  با فرض  $T(0) = 1$ ، کدام است؟

(۱)  $\theta(n^{2^n})$  (۲)  $\theta(2^n \log(n))$

(۳)  $\theta(2^{n^2})$  (۴)  $\theta((\sqrt{2})^{n^2+n})$

۲- آرایه A شامل n عدد متمایز است. قطعه‌کد زیر، مقدار مینیمم A را به دست می‌آورد:

$\text{min} \leftarrow +\infty$

for (i = 1; i <= n; i++)

if (min > A[i])

min = A[i]; // \*

فرض کنید هریک از جایگشت‌های A با احتمال برابر رخ می‌دهد. اگر y مجموع تعداد دفعاتی باشد که مینیمم در سطری

که با \* مشخص شده است تغییر می‌کند، کدام مورد زیر، به مقدار میانگین y نزدیک‌تر است؟  $(\ln n = \log_e n)$

(۱) ۱ (۲)  $\ln n$

(۳) n (۴)  $n \cdot \ln n$

۳- میانگین زمان لازم برای جست‌وجو در روش هم‌سازی (Hashing) روی n داده، از چه مرتبه‌ای است؟

(۱) ۱ (۲)  $\log n$  (۳) n (۴)  $n \cdot \log n$

۴- فرض کنید یک صف اولویت (Priority Queue) با ساختار داده هرم (Heap) پیاده‌سازی شده است. شما نیاز دارید تابع

update key (x, k) را طراحی کنید، که مقدار اولویت عنصر x را به k تغییر داده و ترتیب هرم را حفظ کند. علاوه بر

این، تابع باید کارایی بهینه داشته باشد. پیچیدگی زمانی این تابع، از چه مرتبه‌ای است؟

(۱) n (۲)  $\log n$

(۳)  $n \cdot \log n$  (۴) k

۵- فرض کنید یک کامپیوتر با حافظه اولیه 2 MB دارید و می‌خواهید یک فایل به طول 500 MB که در دیسک قرار دارد

را مرتب‌سازی کنید. کدام یک از روش‌های زیر می‌تواند به شما کمک کند تا این کار را با زمان بهتری انجام دهید؟

(۱) تقسیم فایل به بخش‌های کوچک‌تر که در حافظه جا شوند و مرتب‌سازی هر بخش به صورت جداگانه با مرتب‌سازی ادغامی

(۲) تقسیم فایل به بخش‌های کوچک‌تر که در حافظه جا شوند و مرتب‌سازی هر بخش به صورت جداگانه با مرتب‌سازی سریع

(۳) خواندن داده‌ها به صورت ترتیبی و مرتب‌سازی عناصر در هنگام خواندن، بدون نیاز به ترکیب مجدد بخش‌ها

(۴) استفاده از الگوریتم مرتب‌سازی در محل، روی دیسک برای اجتناب از محدودیت حافظه اصلی

۶- فرض کنید یک لیست پیوندی یکتا (Single Linked List) داریم که هر گره آن، شامل یک مقدار عددی صحیح و یک اشاره‌گر به گره بعدی است. این لیست ممکن است به‌طور تصادفی یک حلقه (Cycle) داشته باشد، یعنی یکی از گره‌ها به گره قبلی در لیست اشاره کند. شما باید بررسی کنید که آیا لیست شامل حلقه است یا خیر و در صورت وجود، نقطه شروع حلقه را پیدا کنید. کدامیک از روش‌های زیر، با کمترین پیچیدگی زمانی و حافظه می‌تواند این مسئله را حل کند؟

- (۱) تبدیل لیست پیوندی به یک آرایه و سپس بررسی وجود گره‌های تکراری در آرایه
- (۲) محاسبه طول کل لیست با پیمایش کامل و بررسی این که آیا اشاره‌گر گره‌ای دوباره به لیست بازمی‌گردد یا خیر.
- (۳) استفاده از الگوریتم دو اشاره‌گر که یکی از اشاره‌گرها با سرعت یک گره و دیگری با دو گره اختلاف از اشاره‌گر اول با سرعت یک گره حرکت می‌کند.
- (۴) استفاده از یک جدول هش (Hash Table) برای نگهداری گره‌هایی که بازدید شده‌اند و بررسی این که آیا هر گره قبلاً دیده شده است یا خیر.

۷- دو مجموعه  $S_1$  و  $S_2$  به طول  $n$  و عدد  $x$  داده شده‌اند. هدف پیدا کردن این است که آیا یک جفت عضو، یکی از  $S_1$  و دیگری از  $S_2$  وجود دارد که مجموع آنها بیشتر از  $x$  باشد. کدامیک از رویکردهای زیر، بهترین کارایی را دارد؟

- (۱) مرتب‌سازی هر دو مجموعه و بررسی خطی تمام جفت‌های ممکن.
  - (۲) مرتب‌سازی هر دو مجموعه و استفاده از جستجوی خطی برای هر عضو مجموعه دیگر
  - (۳) استفاده از دو حلقه تو در تو برای بررسی تمامی جفت‌های ممکن از  $S_1$  و  $S_2$
  - (۴) مرتب‌سازی یکی از مجموعه‌ها، سپس استفاده از جستجوی دودویی برای هر عضو مجموعه دیگر
- ۸- فرض کنید مسئله (Maximum Overlap)، به این صورت تعریف شده است. مجموعه‌ای از بازه‌ها (Intervals) داده شده است و هدف پیدا کردن نقطه‌ای است که بیشترین تعداد بازه‌های آن را پوشش دهد. کدامیک از روش‌های زیر، برای حل این مسئله مناسب‌تر است؟ (اعداد اعشاری نیز مد نظر هستند).

- (۱) مرتب‌سازی بازه‌ها براساس نقاط شروع و خاتمه و استفاده از یک شمارنده برای بررسی تعداد بازه‌های فعال در هر لحظه
  - (۲) استفاده از الگوریتم تقسیم و حل برای تقسیم بازه‌ها به دو زیرمجموعه و ادغام نتایج با ترکیب بازه‌های مشترک
  - (۳) استفاده از یک درخت جستجوی دودویی برای ذخیره نقاط شروع و خاتمه و جستجوی نقطه با بیشترین تعداد بازدید
  - (۴) استفاده از الگوریتم شاخه و حد برای بررسی تمام نقاط ممکن در بازه‌ها و پیدا کردن نقطه‌ای که حداکثر تعداد پوشش را دارد.
- ۹- فرض کنید یک لیست دوطرفه حلقوی (Circular Doubly Linked List) داریم که هر گره شامل یک مقدار عددی صحیح است. شما باید با استفاده از این لیست دوطرفه حلقوی، یک صف اولویت‌دار (Priority Queue) را پیاده‌سازی کنید. این صف باید عملیات زیر را به‌طور کارآمد انجام دهد:

- Insert (x): اضافه کردن یک عنصر  $x$  به صف، به‌طوری که عناصر به ترتیب صعودی مرتب شوند.
  - Extract Min(): حذف و بازگرداندن کوچک‌ترین مقدار از صف
  - Decrease key (node, k): کاهش مقدار گره مشخص شده node به  $k$  و به‌روزرسانی ترتیب صف
- کدامیک از روش‌های زیر، بهترین پیاده‌سازی را ارائه می‌دهد؟
- (۱) در زمان Insert، عنصر  $x$  را به انتهای لیست اضافه کنید و سپس لیست را به‌طور کامل مرتب کنید.
  - (۲) در زمان Insert، عنصر  $x$  را با جستجوی خطی در محل مناسب درج کنید تا ترتیب لیست حفظ شود.
  - (۳) در زمان Insert، عنصر  $x$  را به انتهای لیست اضافه کنید و تنها هنگام اجرای Extract Min، لیست را مرتب کنید.
  - (۴) در زمان Insert، از یک اشاره‌گر اضافی برای حفظ کوچک‌ترین عنصر استفاده کنید و ترتیب لیست را در زمان اجرای Decrease key با جابه‌جایی گره‌ها به‌روزرسانی کنید.

۱۰- دورترین رأس از یک رأس داده شده  $V$  در یک گراف بدون وزن، رأسی است که فاصله آن تا  $V$ ، بیشترین باشد.

کدام روش زیر، برای یافتن دورترین رأس از  $V$  مناسب تر و سریع تر است؟

(۱) BFS (۲) دایکسترا

(۳) DFS (۴) مرتب سازی توپولوژیکی

۱۱- کدام مورد درست است؟

(۱) همه مسائلی که با رویکرد الگوریتم های شاخه و حد قابل حل هستند، توسط رویکرد الگوریتم های پویا هم قابل حل هستند.

(۲) به صورت اتفاقی، بعضی از مسائلی که با رویکرد الگوریتم های پویا قابل حل هستند، توسط رویکرد الگوریتم های شاخه و حد قابل حل هستند.

(۳) همه مسائلی که با رویکرد الگوریتم های پویا قابل حل هستند توسط رویکرد الگوریتم های شاخه و حد قابل حل هستند.

(۴) هیچ کدام

۱۲- زمان اجرای دو برنامه  $A$  و  $B$  روی ورودی های  $n$  بیتی (به ازای هر عدد  $n$ ) در بدترین حالت به ترتیب  $n \log n$  و  $n^2$  است.

کدام گزاره یا گزاره ها درست است؟

الف - برای  $n$  های به اندازه کافی بزرگ، برای همه ورودی های  $n$  بیتی، برنامه  $A$  سریع تر از برنامه  $B$  است.

ب - برای  $n$  های به اندازه کافی بزرگ، برای ورودی های  $n$  بیتی، برنامه  $A$  به طور متوسط سریع تر از برنامه  $B$  است.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب»

(۳) هم «الف» و هم «ب» (۴) نه «الف» و نه «ب»

۱۳- از دو گزاره زیر، کدام مورد درست است؟

الف - در یک استدلال معتبر، حکم همواره ارزش درست دارد.

ب - در یک استدلال غیرمعتبر، اگر همه فرضیات درست باشند، آنگاه حکم درست نیست.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب»

(۳) هم «الف» و هم «ب» (۴) نه «الف» و نه «ب»

۱۴- کدام مورد، بهترین ترجمه برای عبارت زیر در منطق سورها است؟

«فقط دانشجویانی که تلاش کرده باشند، همه سؤالات آزمون را جواب می دهند.»

$S(x)$ : دانشجو است  $x$

$T(x)$ : تلاش کرده است  $x$

$A(x, y)$ : به  $x$  جواب می دهد:  $y$

$Q(x)$ : سؤال آزمون است  $x$

$$\forall x [(S(x) \wedge T(x)) \rightarrow \forall y (Q(y) \rightarrow A(x, y))] \quad (۱)$$

$$\forall x [\neg (S(x) \wedge T(x)) \leftrightarrow \neg \forall y (Q(y) \rightarrow A(x, y))] \quad (۲)$$

$$\forall x [S(x) \rightarrow \forall y (Q(y) \rightarrow A(x, y) \rightarrow T(x))] \quad (۳)$$

$$\forall x [(S(x) \wedge \exists y (Q(y) \wedge \neg A(x, y)) \rightarrow \neg T(x)] \quad (۴)$$

۱۵- فرض کنید  $L$  زبان مرتبه اول  $L = \{R, f, C\}$  باشد که در آن،  $R$  نماد معمولی دومی،  $f$  نماد تابعی دومی و  $C$  ثابت است. دو  $L$ -ساخت  $M$  و  $N$  را در نظر می‌گیریم:

$$N = (N, <, +, \circ), \quad M = (\mathbb{Z}, <_M, \times, -1)$$

که در آن،  $\mathbb{N}$  مجموعه اعداد صحیح نامنفی،  $\mathbb{Z}$  مجموعه اعداد صحیح،  $<$  کوچک‌تری معمولی اعداد صحیح نامنفی،  $+$  جمع،  $\times$  ضرب و  $<_M$  به صورت زیر است:

$$x <_M y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y < \circ, & -x < -y \\ x, y \geq \circ, & x < y \\ x < \circ, & y \geq \circ \end{cases}$$

اگر  $\alpha: N \rightarrow M$  یک نشانندن (embedding) از  $N$  به  $M$  باشد، از دو گزاره زیر، کدام مورد همواره درست است؟  
الف - چنین نشانندنی وجود ندارد.

ب - تعداد نامتناهی نشانندن مانند  $\alpha$  وجود دارد که هیچ کدام نمی‌توانند پوشا باشند.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب» (۳) هم «الف» و هم «ب» (۴) نه «الف» و نه «ب»

۱۶- اگر  $M$  یک  $L$ -ساخت باشد، آنگاه  $Th(M)$  مجموعه تمام جملات  $\sigma$  در زبان  $L$  است که  $M \models \sigma$ . اگر  $L = \{R\}$  شامل تنها یک نماد معمولی دومی،  $M = (\mathbb{Q}, <)$  و  $N = (\mathbb{R}, <)$  باشند، آنگاه کدام مورد درست است؟

$$Th(M) \subsetneq Th(N) \quad (۲)$$

$$Th(N) \subsetneq Th(M) \quad (۱)$$

$$Th(N) \cap Th(M) = \emptyset \quad (۴)$$

$$Th(M) = Th(N) \quad (۳)$$

۱۷- فرض کنید  $T$  یک نظریه مرتبه اول و  $\phi$  یک فرمول باشد. تعداد گزاره‌های درست از میان گزاره‌های «الف»، «ب» و «پ»، کدام است؟

الف - اگر  $T \vdash \neg \phi$ ، آنگاه  $T \cup \{\phi\}$  ناسازگار است.

ب - اگر  $T$  ناسازگار باشد، آنگاه برای هر فرمول  $\tau$  داریم:  $T \vdash \tau$ .

پ - اگر  $T \cup \{\phi\}$  ناسازگار باشد، آنگاه  $T \vdash \neg \phi$ .

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۱۸- فرض کنید اوردینال  $\gamma > \circ$  دارای این ویژگی است که برای هر  $\alpha, \beta < \gamma$ ،  $\alpha + \beta < \gamma$ . کدام یک از گزاره‌های زیر، درست است؟

الف - برای هر  $\alpha < \gamma$ ،  $\alpha + \gamma = \gamma$ .

ب - برای هر  $\alpha < \gamma$ ،  $\gamma + \alpha = \gamma$ .

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب» (۳) هم «الف» و هم «ب» (۴) نه «الف» و نه «ب»

۱۹- فرض کنید  $F$  مجموعه همه توابع یک‌به‌یک از  $\mathbb{N}$  به  $\mathbb{N}$  باشد. کدام مورد برای  $F$ ، درست است؟

(۱)  $F$  تهی است. (۲)  $F$  ناشمارا است.

(۳)  $F$  ناتهی ولی متناهی است. (۴)  $F$  نامتناهی ولی شمارا است.

۲۰- بزرگ‌ترین عدد طبیعی  $k$ ، که  $\begin{pmatrix} \gamma^4 \\ \gamma^3 \end{pmatrix}$  بر  $\gamma^k$  بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

(۱) ۴۰۰

(۲) ۳۴۳

(۳) ۵۸

(۴) ۱

۲۱- تعداد جواب‌های معادله  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 130$ ، به‌طوری که هریک از  $x_1, \dots, x_5$ ، یک عدد مثبت دورقمی باشد، کدام است؟

$$(1) \begin{pmatrix} 89 \\ 85 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 84 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 129 \\ 125 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 134 \\ 130 \end{pmatrix}$$

۲۲-  $a_0, a_1, a_2, \dots$  و  $b_0, b_1, b_2, \dots$  دنباله است. دنباله  $c_0, c_1, c_2, \dots$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$b_n = a_{2n} : n \geq 0 \quad \text{برای هر}$$

$$c_n = \begin{cases} a_n : n \geq 0 \text{ زوج} \\ 2 \\ 0 : n \geq 0 \text{ فرد} \end{cases}$$

تابع مولد این ۳ دنباله را به‌ترتیب با  $A(x)$ ،  $B(x)$  و  $C(x)$  نشان می‌دهیم. کدام مورد، لزوماً درست است؟

$$(1) B(x) = A(x^2)$$

$$(2) C(x) = A(x^2)$$

$$(3) B(x^2) = A(x)$$

$$(4) C(x^2) = A(x)$$

۲۳- فرض کنید در هر زیرمجموعه  $S$  عضوی از مجموعه اعداد مثبت دورقمی، دو عضو متمایز وجود داشته باشد که تفاضل آنها کمتر از ۷ است. کوچک‌ترین عدد  $S$ ، کدام است؟

$$(1) 16$$

$$(2) 15$$

$$(3) 14$$

$$(4) 13$$

۲۴- به چند طریق می‌توان ۱۵ پله را با قدم‌های ۲ و ۳ پله‌ای طی کرد؟

$$(1) 49$$

$$(2) 37$$

$$(3) 28$$

$$(4) 16$$

۲۵- فرض کنید  $A$  یک زیرمجموعه ۴ عضوی از  $\{1, 2, \dots, 10\}$  باشد، به طوری که دو عضو  $x$  و  $y$  در  $A$  موجود باشند، که  $x+y$  فرد باشد. چه تعداد مجموعه مانند  $A$  وجود دارد؟

(۱) ۲۰۰

(۲) ۲۰۵

(۳) ۲۰۸

(۴) ۲۰۹

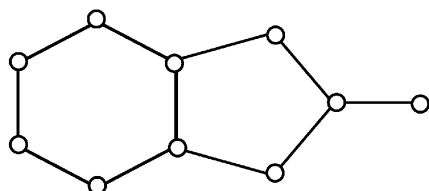
۲۶- تعداد زیردرخت‌های فراگیر برای گراف زیر، کدام است؟

(۱) ۲۰

(۲) ۲۹

(۳) ۳۷

(۴) ۴۵



۲۷-  $G$  یک گراف کامل ۸ رأسی و  $H$  یک گراف تهی (بدون یال) ۱۰ رأسی است. بین هر رأس  $G$  و هر یال  $H$ ، یک یال قرار داده‌ایم تا گراف  $I$  حاصل شود. به چند طریق می‌توان ۳ رأس از  $I$  انتخاب کرد، به طوری که میان این ۳ رأس، دوبه‌دو یال وجود داشته باشد؟

(۱) ۳۳۶

(۲) ۴۴۸

(۳) ۵۰۴

(۴) ۶۹۶

۲۸- با توجه به رابطه بازگشتی زیر، چه تعداد از اعداد  $a_{100}, a_{101}, \dots, a_{112}, a_{113}$  زوج هستند؟

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2} + 4 \\ a_{16} = 1403 \\ a_{17} = 2025 \end{cases}$$

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۱۰

۲۹- کدام مورد، برای ماتریس متعامد  $Q_{n \times n}$  نادرست است؟ ( $\cdot, >, <$  نمایش ضرب داخلی است).

(۱) به‌ازای هر  $x \in \mathbb{R}^n$ ،  $\|Qx\|_p = \|x\|_p$ .

(۲) به‌ازای هر  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ،  $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ .

(۳) مقادیر ویژه ماتریس  $Q$ ، درون یا روی گوی واحد قرار دارند.

(۴) اگر  $v \in \mathbb{R}^n$  یک بردار ناصفر و  $Q = I - vv^T$  متعامد باشد، آنگاه  $\|v\|_p = 1$ .

۳۰- فرض کنید  $A$  یک ماتریس مربعی  $n \times n$  باشد که در نامساوی  $\|Ax\| \geq \theta \|x\|$  به ازای مقدار  $\theta > 0$  و هر  $x \in \mathbb{R}^n$  صدق کند. کدام مورد نا درست است؟

$$(۱) \|A^{-1}\| \leq \theta^{-1}$$

(۲) ماتریس  $A$ ، مثبت معین است.

(۳) ماتریس  $A$ ، نامنفرد است.

(۴) اگر  $\lambda$  یک مقدار ویژه ماتریس  $A$  باشد، آنگاه  $|\lambda| \geq \theta$ .

۳۱- فرض کنید  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  یک پایهٔ یکای متعامد برای زیرفضای  $U$  در فضای  $\mathbb{R}^m$  به شرط  $n \leq m$  باشد.

برای عملگر  $Px = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k$ ، کدام مورد نا درست است؟

(۱)  $P$ ، یک عملگر خودتوان است.

(۲) اگر  $x \in U$ ، آنگاه  $Px \in U$ .

(۳) به ازای هر  $x \in \mathbb{R}^m$ ، نامساوی  $\|x\|_p \leq \|Px\|_p$  برقرار است.

(۴)  $P$ ، یک عملگر خطی از  $\mathbb{R}^m$  به  $U$  است.

۳۲- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$  یک ماتریس مثبت معین باشد. دامنه تغییرات  $a$  کدام است؟

$$(۱) -1 < a < 1$$

$$(۲) -\frac{1}{2} < a < 1$$

$$(۳) -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

$$(۴) 0 < a < 1$$

۳۳- فرض کنید  $L$  و  $U$  به ترتیب ماتریس‌های پایین‌مثلثی و بالامثلثی باشند و  $LU = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  کدام بردار

می‌تواند بردار ستونی متناظر با ستون اول ماتریس  $L$  باشد؟

$$(۱) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (۲) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(۳) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (۴) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



۳۴- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $b = \begin{bmatrix} -25 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ . از نقطه شروع  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$  آغاز می‌کنیم. اگر  $E$  حاصل ضرب

ماتریس‌های جایگشتی باشد، به صورتی که روش تکرار ژاکوبی برای حل دستگاه  $EAx = Eb$  همگرا شود، آنگاه بردار

$x^{(1)}$  حاصل از به کار بردن روش تکرار ژاکوبی در تکرار اول، کدام است؟

$$(1) \begin{pmatrix} 3 \\ 3/5 \\ -1/8 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2/2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 45 \\ -143 \\ 646 \end{pmatrix}$$

۳۵- با به کار بردن قضیه دایره گرشگورین، کدام ناحیه از صفحه مختصات، شامل هیچ کدام از مقادیر ویژه ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1) |z-1| \leq 1$$

$$(2) \left| z + \frac{1}{2} \right| < 2$$

$$(3) |z| < 1$$

$$(4) |z-3| < 1$$

نظریه الگوریتم پیشرفته:

۳۶- چند تا از گزاره‌های زیر، درست است؟

- گزاره ۱: انجام یک جست‌وجو در یک درخت  $\alpha$ -متوازن با  $n$  گره در بدترین حالت به زمان  $O(\log n)$  نیاز دارد.  
 گزاره ۲: هزینه سرشکن درج یک گره در یک درخت  $\alpha$ -متوازن با  $n$  گره و حذف یک گره از آن  $O(\log n)$  است.  
 گزاره ۳: الگوریتم تصادفی در زمان میانگین  $O(n)$  وجود دارد که تعیین کند آیا یک آرایه  $n$  عنصر  $A$ ، حاوی عناصر تکراری هست یا خیر.

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) 1$$

$$(3) 2 \quad (4) 3$$

۳۷- می‌خواهیم یک روش کارآمد برای محاسبه  $a^b \bmod n$  بیابیم که در آن،  $a$  و  $b$  اعداد صحیح نامنفی و  $n$  یک عدد صحیح مثبت است. اگر ورودی‌های  $a$  و  $b$  و  $n$  اعداد  $\beta$  بیتی باشد، آنگاه تعداد کل اعمال بیتی موردنیاز، از چه مرتبه‌ای است؟

$$(1) \beta^3 \quad (2) \beta^2$$

$$(3) \beta \quad (4) 1$$

۳۸- فرض کنید یک آرایه پویا دارید که در صورت پر شدن، ظرفیت آن دو برابر می‌شود. اگر تعداد عملیات درج  $n$  باشد، زمان اجرای سرشکنی هر عملیات درج، از چه مرتبه‌ای است؟

- (۱)  $n$  (۲)  $n^2$   
(۳) ۱ (۴)  $\log n$

۳۹- فرض کنید الگوریتمی موازی روی یک پردازنده با  $p$  هسته اجرا می‌شود. این الگوریتم دارای یک بخش سری (ترتیبی) با پیچیدگی زمانی  $T_s$  و یک بخش کاملاً موازی با پیچیدگی زمانی  $T_p$  است. طبق قانون Amdhal، چه چیزی محدودیت افزایش سرعت الگوریتم را تعیین می‌کند؟

- (۱) زمان بخش موازی (۲) زمان بخش سری  
(۳) تعداد هسته‌های پردازنده (۴) توازن بار بین پردازنده‌ها

۴۰- مسئله ماکزیمم جریان در یک شبکه با  $m$  رأس و  $n$  یال را در نظر بگیرید که در آن، ظرفیت یال  $(i, j)$  است و  $f$  نشان‌دهنده مقدار جریانی است که از رأس ۱ به رأس  $m$  در شبکه فرستاده می‌شود. اگر  $X_{ij}$  مقدار جریانی باشد که از رأس  $i$  به رأس  $j$  می‌رود، مدل برنامه‌ریزی خطی این مسئله کدام است؟

$$(1) \begin{cases} \max f \\ \text{subject to : } \sum_j X_{ij} - \sum_k X_{kj} = \begin{cases} f & i \neq 1 \\ 0 & i \neq 1, m \\ -f & i = m \end{cases} \\ 0 \leq X_{ij} \leq u_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \max f \\ \text{subject to : } \sum_j X_{ij} - \sum_k X_{kj} = \begin{cases} -f & i = 1 \\ 0 & i \neq 1, m \\ f & i = m \end{cases} \\ 0 \leq X_{ij} \leq u_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \max f \\ \text{subject to : } \sum_j X_{ij} - \sum_k X_{kj} = \begin{cases} f & i = 1, m \\ 0 & i \neq m \end{cases} \\ 0 \leq X_{ij} \leq u_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \max f \\ \text{subject to : } \sum_j X_{ij} - \sum_k X_{kj} = \begin{cases} -f & i = 1 \\ 0 & i \neq 1, m \\ f & i \neq m \end{cases} \\ X_{ij} \geq u_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

۴۱- فرض کنید یک مجموعه از اعداد صحیح  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  و یک عدد مفروض  $T$  داده شده است. می‌خواهیم تمام زیرمجموعه‌هایی از  $A$  را بیابیم که مجموع عناصر آنها برابر  $T$  باشد (جمع عناصر هر زیرمجموعه). کدام یک از موارد زیر می‌تواند به یک الگوریتم قطعی و شناخته‌شده برای حل این مسئله منجر شود؟

- (۱) استفاده از الگوریتم حریصانه
- (۲) استفاده از الگوریتم دایجکسترا
- (۳) استفاده از الگوریتم عقب‌گرد
- (۴) استفاده از الگوریتم ژنتیک

۴۲- فرض کنید  $A[1, \dots, n]$  یک آرایه  $n$  تایی از اعداد یکتا باشد. اگر  $i < j$  و  $A[i] > A[j]$  آنگاه جفت  $(i, j)$  یک وارونگی (Inversion) در آرایه  $A$  خواهد بود. فرض کنید از میان  $n!$  جایگشت ممکن، یک جایگشت به صورت تصادفی و با احتمال یکسان انتخاب شود. در این صورت، امید ریاضی تعداد وارونگی‌های جایگشت حاصل کدام است؟

$$n \quad (۱)$$

$$\frac{n^2}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{n^2}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{n(n-1)}{4} \quad (۴)$$

۴۳- در الگوریتم‌های حریصانه برای مسئله پارتیشن‌بندی اعداد به دو زیرمجموعه با مجموع برابر، چه ویژگی‌ای از اعداد می‌تواند تضمین کند که الگوریتم حریصانه، همیشه بهینه عمل کند؟

- (۱) اعداد دارای رشد نمایی هستند.
- (۲) اعداد در توزیع یکنواخت هستند.
- (۳) اعداد به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند.
- (۴) اعداد به صورت افزایشی مرتب شده‌اند و هر عدد، حداقل دو برابر عدد قبلی است.

۴۴- هدف اصلی الگوریتم KMP (Knuth-Morris-Pratt) چیست؟ (طول الگو  $m$  و طول متن  $n$  است.)

- (۱) یافتن همه وقوع‌های یک الگو در یک متن با زمان اجرای  $O(mn)$
- (۲) یافتن اولین وقوع یک الگو در یک متن با زمان اجرای  $O(n+m)$
- (۳) یافتن طولانی‌ترین پیشوند یک رشته که یک پسوند نیز باشد.
- (۴) مقایسه تمامی زیررشته‌های متن با الگو بدون استفاده از جدول الگوی شکست

۴۵- کدام مورد زیر، به درستی ویژگی مسائل coNP-کامل را بیان می‌کند؟

- (۱) مجموعه‌ای از مسائل هستند که مکمل مسائل NP-کامل هستند و پاسخ آن‌ها تنها در زمان نمایی قابل تأیید است.
- (۲) مسائل تصمیم‌گیری‌ای هستند که اگر پاسخ آن‌ها نه باشد، می‌توان آن را در زمان چند جمله‌ای تأیید کرد.
- (۳) لزوماً مکمل مسائل NP-کامل نیستند و می‌توانند در هر رده پیچیدگی محاسباتی قرار گیرند.
- (۴) مجموعه‌ای از مسائل هستند که برای پاسخ بله و نه به زمان چندجمله‌ای برای تأیید نیاز دارند.

زیست‌شناسی سلولی و مولکولی – آمار و احتمال – ساختمان داده و الگوریتم – ریاضیات گسسته:

۴۶- کدام مورد زیر، در ارتباط با ترکیب بروموداکسی یوریدین جهت بررسی نرخ جمعیت سلولی قرار گرفته در چرخه سلولی درست نیست؟

(۱) طی همانندسازی DNA، وارد ژنوم می‌شود.

(۲) طی متراکم شدن DNA در مرحله M چرخه سلولی، وارد ژنوم می‌شود.

(۳) برای اندازه‌گیری جمعیت سلول‌های وارد شده به مرحله M چرخه سلولی استفاده می‌شود.

(۴) برای اندازه‌گیری جمعیت سلول‌های وارد شده به مرحله S چرخه سلولی استفاده می‌شود.

۴۷- کدام مورد زیر، نوعی G- پروتئین تریمریک است؟

Raf (۱) Rab (۲) Ras (۳) Transducin (۴)

۴۸- کدام مورد، مربوط به عملکرد شبکه آندوپلاسمی صاف نیست؟

(۱) آزادسازی گلوکز از سلول‌های کبدی به جریان خون (۲) رهاسازی پون‌های کلسیم از فضای سیسترنی

(۳) سنتز هورمون‌های استروئیدی (۴) سم‌زدایی از ترکیبات آلی مانند فنل و باربیتورات‌ها

۴۹- هنگامی که یک پتانسیل عمل شروع می‌شود، غشا ..... می‌شود. این حالت به دلیل ..... یون‌های ..... ایجاد می‌شود.

Depolarize – influx –  $Na^+$  (۱) Hyperpolarize – efflux –  $Na^+$  (۲)

Hyperpolarize – influx –  $Na^+$  (۳) Depolarize – efflux –  $Na^+$  (۴)

۵۰- کدام مورد نادرست است؟

(۱) فسفوریلاسیون تأثیری در عملکرد کوهسین ندارد.

(۲) با افزودن آنتی‌بادی علیه SMC می‌توان مانع از فشردگی ماده ژنتیکی شد.

(۳) با فسفوریلاسیون SMC توسط MPF، فشردگی ماده ژنتیکی افزایش می‌یابد.

(۴) کاندسین غیرفسفریله می‌تواند در لوله آزمایش باعث ایجاد خمیدگی و ابر مارپیچ در مولکول DNA شود.

۵۱- در رابطه با پرموتورهای سلول‌های یوکاریوتی، کدام مورد درست است؟

(۱) در پرموتورهای کلاس I سه منطقه با توالی‌های حفاظت‌شده به نام‌های DPE، UPE و Core promoter وجود دارد.

(۲) در پرموتورهای کلاس II بدون جعبه TATA، محل اتصال TBP، DPE است.

(۳) در ژن‌های خانه‌نگه‌دار، پرموتورهای کلاس II غالباً بدون جعبه TATA هستند.

(۴) پرموتورهای ژن‌های srRNA ۵ از نوع کلاس I است.

۵۲- پروتئین‌های غشایی که کاملاً در بیرون از دو لایه فسفولیپیدی (سطح خارجی یا سطح سیتوپلاسمی) قرار دارد و

از طریق پیوند کووالانسی به یک لیپید غشایی متصل است، چه نامیده می‌شود؟

Transmembrane (۱) Integral (۲)

Lipid – anchore (۳) Peripheral (۴)

۵۳- در صورت تخریب «۲۳S rRNA»، چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

(۱) ترانسلوکاسیون رخ نمی‌دهد. (۲) EF-Tu به مجموعه متصل نمی‌شود.

(۳) EF-Tu از مجموعه جدا نمی‌شود. (۴) مرحله آغاز ترجمه مختل نمی‌شود.

۵۴- در پروسه پلی‌مریزاسیون ریزرشته‌ها، غلظت بحرانی G-actin-ATP (Cc) برای انتهای مثبت رشته ۰/۱۲ میکرومول و برای انتهای منفی ۰/۶ میکرومول است. اگر غلظت بحرانی به ۰/۳ میکرومول برسد، چه اتفاقی می‌افتد؟

- (۱) هر دو انتها شروع به فروپاشی می‌کنند.  
(۲) رشد انتهای منفی، کندتر از انتهای مثبت می‌شود.  
(۳) حرکت tread milling اتفاق می‌افتد.  
(۴) هر دو سر مثبت و منفی، به یک میزان رشد می‌کنند.

۵۵- گیرنده‌های سابتوکائین‌ها از کدام نوع هستند؟

- (۱) Metabotropic receptors  
(۲) G-protein-coupled receptors  
(۳) Ion-channel-coupled receptors  
(۴) Tyrosine kinase-associated receptors

۵۶- کدام مورد، پروتئوگلیکان موجود در ساختار «بازال لامینا» نیست؟

- (۱) Agrican (۲) Agrin (۳) Decorin (۴) Perlecan

۵۷- در کدام شرایط، احتمال دارد که سلول‌های توموری پس از آسیب به DNA، دچار آپوپتوز شوند؟

- (۱) Rb غیرفعال  
(۲) Bax غیرفعال  
(۳) Rb فعال  
(۴) P53 فعال

۵۸- جعبه I شامل ۴ مهره سبز و ۴ مهره سفید و جعبه II شامل ۴ مهره سبز و ۶ مهره سفید است. یک مهره را به تصادف از هر ظرف انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه مهره‌ها هم‌رنگ باشند، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$   
(۲)  $\frac{1}{3}$   
(۳)  $\frac{2}{3}$   
(۴)  $\frac{3}{4}$

۵۹- اگر توزیع مدت مکالمه تلفنی در یک تلفن همگانی، از توزیع نمایی با میانگین ۴ تبعیت کند، احتمال اینکه مدت مکالمه کمتر از ۸ دقیقه باشد، کدام است؟

- (۱)  $e^{-1}$   
(۲)  $e^{-2}$   
(۳)  $1 - e^{-2}$   
(۴)  $1 - e^{-1}$

۶۰- اگر X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد، آنگاه  $P\left[\left|X - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}\right]$  کدام است؟

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

- (۱) ۰/۵۰۰۰  
(۲) ۰/۳۱۲۵  
(۳) ۰/۱۵۶۳  
(۴) ۰/۰۵۲۱

۶۱- متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع احتمالی به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\left(\frac{x-1}{2\sqrt{2}}\right)^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

میانگین و واریانس متغیر تصادفی  $Y = 2X - 1$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  و ۱

(۲)  $\frac{1}{2}$  و ۱

(۳)  $\frac{1}{2}$  و ۱۶

(۴) ۱ و ۱۶

۶۲- زمان چرخه کامیون‌هایی که در یک معدن روباز بین دو مکان تردد می‌کنند، متغیری تصادفی از توزیع نرمال با انحراف معیار  $8/5$  دقیقه است. در نظر است میانگین زمان چرخه این کامیون‌ها با انتخاب نمونه‌های تصادفی از کامیون‌ها و زمان‌سنجی عملیات آنها برآورد شود. اگر بخواهیم بیشینه خطای این برآورد در سطح اطمینان ۹۵ درصد از ۱ دقیقه تجاوز نکند، حداقل تعداد نمونه تصادفی مورد نیاز چقدر است؟ (عدد جدول، ۲ در نظر گرفته شود.)

(۱) ۲۸۹

(۲) ۳۰۷

(۳) ۳۵۰

(۴) ۲۲۱

۶۳- اگر  $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{4}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  و  $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  دو فاصله اطمینان برای میانگین جامعه نرمال باشند، آنگاه طول فاصله اطمینان

$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{4}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  نسبت به  $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  کدام مورد است؟

(۲) بلندتر

(۱) کوتاه‌تر

(۴) نمی‌توان مقایسه کرد.

(۳) تغییری نمی‌کند.

۶۴- کدام رابطه، میان خطاهای نوع I و II همیشه برقرار است؟

(۱) مجموع خطاهای نوع I و II، برابر یک است.

(۲) خطای نوع II، بیشتر از خطای نوع I است.

(۳) خطای نوع II، کمتر از خطای نوع I است.

(۴) نمی‌توان قضاوت کرد.

۶۵- به منظور تعیین تأثیر یک متغیر مستقل روی خاصیت معینی از یک محصول، آزمایشی انجام شده است. اطلاعات حاصل از مشاهدات، به صورت زیر خلاصه شده است. معادله خط رگرسیونی برازش یافته کدام است؟

$$\bar{x} = 5, \bar{y} = 3, \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 160, \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 80$$

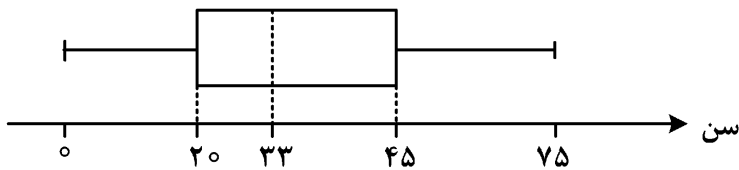
(۱)  $\hat{y} = 0.25 + 0.25x$

(۲)  $\hat{y} = -0.25 + 0.25x$

(۳)  $\hat{y} = 0.5 + 0.5x$

(۴)  $\hat{y} = -0.5 + 0.5x$

۶۶- نمودار جعبه‌ای زیر، تعداد بیمه‌شدگان یک جامعه در سن‌های مختلف را نشان می‌دهد. اگر بدانیم ده درصد بیمه‌شدگان بالای ۶۰ سال سن دارند، تقریباً چند درصد از بیمه‌شدگان بین ۳۳ تا ۶۰ سال هستند؟



(۱) ۳۵

(۲) ۴۰

(۳) ۴۵

(۴) ۵۵

۶۷- از یک کیسه شامل  $N$  توپ که از یک تا  $N$  شماره‌گذاری شده‌اند،  $n$  توپ را بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال این که حداقل یکی از توپ‌ها دو بار انتخاب شود، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{N^n}$

(۲)  $1 - \frac{1}{N!}$

(۳)  $\frac{\binom{N}{n}}{N^n}$

(۴)  $1 - \frac{N!}{n! N^n}$

۶۸- فرض کنید  $B_1, \dots, B_n$  پیشامدهای مستقل از هم، روی فضای نمونه مشترک  $S$  باشند، که  $P(B_i) = \frac{1}{n}$  برای  $i = 1, 2, \dots, n$ . احتمال این که حداکثر یکی از پیشامدها رخ دهد، کدام است؟

(۱)  $\frac{(n-1)^{n-1}(2n-1)}{n^n}$

(۲)  $\frac{n^{n-1}(2n-1)}{(n+1)^n}$

(۳)  $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$

(۴)  $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

۶۹- فرض کنید احتمال این که یک خانواده  $n$  فرزند داشته باشد، برابر  $2^{-n-1}$  است و جنسیت فرزندان از هم مستقل و دارای احتمال مساوی پسر یا دختر باشد. احتمال این که یک خانواده حداقل یک فرزند داشته باشد، مشروط به این که پسر نداشته باشد، چقدر است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{3}{4}$

(۴)  $\frac{1}{4}$

۷۰- در یک بازی شیروخط با یک سکه سالم، بازیکن A تعداد ۲۵ سکه و بازیکن B تعداد ۲۰ سکه را با هم پرتاب می‌کنند. احتمال این که هر دو، تعداد شیرهای مساوی به دست بیاورند، چقدر است؟

$$(1) \left(\frac{1}{2}\right)^{45} \binom{45}{20}$$

$$(2) \left(\frac{1}{2}\right)^{45} \binom{45}{15}$$

$$(3) \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \binom{45}{20}$$

$$(4) \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \binom{45}{15}$$

۷۱- جواب رابطه بازگشتی  $T(n) = 2^n T(n-1)$  با فرض  $T(0) = 1$ ، کدام است؟

$$(1) \theta(n^{2^n})$$

$$(2) \theta(2^n \log(n))$$

$$(3) \theta(2^{n^2})$$

$$(4) \theta((\sqrt{2})^{n^2+n})$$

۷۲- آرایه A شامل n عدد متمایز است. قطعه‌کد زیر، مقدار مینیمم A را به دست می‌آورد:

```
min ← +∞
for (i = 1; i ≤ n; i++)
    if (min > A[i])
        min = A[i]; // *
```

فرض کنید هریک از جایگشت‌های A با احتمال برابر رخ می‌دهد. اگر y مجموع تعداد دفعاتی باشد که مینیمم در سطری

که با \* مشخص شده است تغییر می‌کند، کدام مورد زیر، به مقدار میانگین y نزدیک‌تر است؟  $(\ln n = \log_e n)$

$$(1) 1$$

$$(2) \ln n$$

$$(3) n$$

$$(4) n \cdot \ln n$$

۷۳- میانگین زمان لازم برای جست‌وجو در روش هم‌سازی (Hashing) روی n داده، از چه مرتبه‌ای است؟

$$(1) 1$$

$$(2) \log n$$

$$(3) n$$

$$(4) n \cdot \log n$$



۷۴- فرض کنید یک صف اولویت (Priority Queue) با ساختار داده هرم (Heap) پیاده‌سازی شده است. شما نیاز دارید تابع  $\text{update key}(x, k)$  را طراحی کنید، که مقدار اولویت عنصر  $x$  را به  $k$  تغییر داده و ترتیب هرم را حفظ کند. علاوه بر

این، تابع باید کارایی بهینه داشته باشد. پیچیدگی زمانی این تابع، از چه مرتبه‌ای است؟

(۱)  $n$  (۲)  $\log n$  (۳)  $n \cdot \log n$  (۴)  $k$

۷۵- فرض کنید یک کامپیوتر با حافظه اولیه 2 MB دارید و می‌خواهید یک فایل به طول 500 MB که در دیسک قرار دارد را مرتب‌سازی کنید. کدام یک از روش‌های زیر می‌تواند به شما کمک کند تا این کار را با زمان بهتری انجام دهید؟

- (۱) تقسیم فایل به بخش‌های کوچک‌تر که در حافظه جا شوند و مرتب‌سازی هر بخش به‌صورت جداگانه با مرتب‌سازی ادغامی
- (۲) تقسیم فایل به بخش‌های کوچک‌تر که در حافظه جا شوند و مرتب‌سازی هر بخش به‌صورت جداگانه با مرتب‌سازی سریع
- (۳) خواندن داده‌ها به‌صورت ترتیبی و مرتب‌سازی عناصر در هنگام خواندن، بدون نیاز به ترکیب مجدد بخش‌ها
- (۴) استفاده از الگوریتم مرتب‌سازی در محل، روی دیسک برای اجتناب از محدودیت حافظه اصلی

۷۶- فرض کنید یک لیست پیوندی یکتا (Single Linked List) داریم که هر گره آن، شامل یک مقدار عددی صحیح و یک اشاره‌گر به گره بعدی است. این لیست ممکن است به‌طور تصادفی یک حلقه (Cycle) داشته باشد، یعنی یکی از گره‌ها به گره قبلی در لیست اشاره کند. شما باید بررسی کنید که آیا لیست شامل حلقه است یا خیر و در صورت وجود، نقطه شروع حلقه را پیدا کنید. کدام یک از روش‌های زیر، با کمترین پیچیدگی زمانی و حافظه می‌تواند این مسئله را حل کند؟

- (۱) تبدیل لیست پیوندی به یک آرایه و سپس بررسی وجود گره‌های تکراری در آرایه
- (۲) محاسبه طول کل لیست با پیمایش کامل و بررسی این که آیا اشاره‌گر گره‌ای، دوباره به لیست بازمی‌گردد یا خیر.
- (۳) استفاده از الگوریتم دو اشاره‌گر که یکی از اشاره‌گرها با سرعت یک گره و دیگری با دو گره اختلاف از اشاره‌گر اول با سرعت یک گره حرکت می‌کند.

(۴) استفاده از یک جدول هش (Hash Table) برای نگهداری گره‌هایی که بازدید شده‌اند و بررسی این که آیا هر گره قبلاً دیده شده است یا خیر.

۷۷- دو مجموعه  $S_1$  و  $S_2$  به طول  $n$  و عدد  $x$  داده شده‌اند. هدف پیدا کردن این است که آیا یک جفت عضو، یکی از  $S_1$  و دیگری از  $S_2$  وجود دارد که مجموع آنها بیشتر از  $x$  باشد. کدام یک از رویکردهای زیر، بهترین کارایی را دارد؟

- (۱) مرتب‌سازی هر دو مجموعه و بررسی خطی تمام جفت‌های ممکن
- (۲) مرتب‌سازی هر دو مجموعه و استفاده از جستجوی خطی برای هر عضو مجموعه دیگر
- (۳) استفاده از دو حلقه تو در تو برای بررسی تمامی جفت‌های ممکن از  $S_1$  و  $S_2$
- (۴) مرتب‌سازی یکی از مجموعه‌ها سپس استفاده از جستجوی دودویی برای هر عضو مجموعه دیگر

۷۸- فرض کنید مسئله (Maximum Overlap)، به این صورت تعریف شده است. مجموعه‌ای از بازه‌ها (Intervals) داده شده است و هدف پیدا کردن نقطه‌ای است که بیشترین تعداد بازه‌های آن را پوشش دهد. کدام یک از روش‌های زیر، برای حل این مسئله مناسب‌تر است؟ (اعداد اعشاری نیز مد نظر هستند.)

- (۱) مرتب‌سازی بازه‌ها براساس نقاط شروع و خاتمه و استفاده از یک شمارنده برای بررسی تعداد بازه‌های فعال در هر لحظه
- (۲) استفاده از الگوریتم تقسیم و حل برای تقسیم بازه‌ها به دو زیرمجموعه و ادغام نتایج با ترکیب بازه‌های مشترک
- (۳) استفاده از یک درخت جستجوی دودویی برای ذخیره نقاط شروع و خاتمه و جستجوی نقطه با بیشترین تعداد بازدید
- (۴) استفاده از الگوریتم شاخه و حد برای بررسی تمام نقاط ممکن در بازه‌ها و پیدا کردن نقطه‌ای که حداکثر تعداد پوشش را دارد.

۷۹- فرض کنید یک لیست دوطرفه حلقوی (Circular Doubly Linked List) داریم که هر گره شامل یک مقدار عددی صحیح است. شما باید با استفاده از این لیست دوطرفه حلقوی، یک صفت اولویت‌دار (Priority Queue) را پیاده‌سازی کنید. این صف باید عملیات زیر را به‌طور کارآمد انجام دهد:

– Insert (x): اضافه کردن یک عنصر x به صف به‌طوری‌که عناصر به ترتیب صعودی مرتب شوند.

– Extract Min(): حذف و بازگرداندن کوچک‌ترین مقدار از صف

– Decrease key (node,k): کاهش مقدار گره مشخص‌شده node به k و به‌روزرسانی ترتیب صف

کدام یک از روش‌های زیر، بهترین پیاده‌سازی را ارائه می‌دهد؟

(۱) در زمان Insert، عنصر x را به انتهای لیست اضافه کنید و سپس لیست را به‌طور کامل مرتب کنید.

(۲) در زمان Insert، عنصر x را با جستجوی خطی در محل مناسب درج کنید تا ترتیب لیست حفظ شود.

(۳) در زمان Insert، عنصر x را به انتهای لیست اضافه کنید و تنها هنگام اجرای Extract Min، لیست را مرتب کنید.

(۴) در زمان Insert، از یک اشاره‌گر اضافی برای حفظ کوچک‌ترین عنصر استفاده کنید و ترتیب لیست را در زمان اجرای Decrease key با جابه‌جایی گره‌ها به‌روزرسانی کنید.

۸۰- دورترین رأس از یک رأس داده‌شده V در یک گراف بدون وزن، رأسی است که فاصله آن تا V بیشترین باشد.

کدام روش زیر، برای یافتن دورترین رأس از V مناسب‌تر و سریع‌تر است؟

(۱) BFS (۲) دایکسترا

(۳) DFS (۴) مرتب‌سازی توپولوژیکی

۸۱- در چند ارزش‌دهی از ۸ ارزش‌دهی ممکن برای گزاره‌های اتمی p، q و r، گزاره  $(\sim p) \Rightarrow q \Rightarrow (\sim r)$  درست است؟ ( ~ علامت نقیض یک گزاره است.)

(۱) ۱

(۲) ۳

(۳) ۵

(۴) ۷

۸۲- کدام مورد، معادل گزاره زیر است؟

«اگر برف یا باران ببارد، چتر و پالتو داریم.»

(۱) اگر برف یا باران نبارد، نه چتر داریم نه پالتو.

(۲) اگر چتر یا پالتو نداشته باشیم، نه برف می‌بارد نه باران.

(۳) اگر چتر و پالتو نداشته باشیم، یا برف نمی‌بارد یا باران.

(۴) اگر برف و باران نبارد، یا چتر نداریم یا پالتو.

۸۳- چند رابطه هم‌ارزی روی مجموعه  $\{a, b, c, d\}$  وجود دارد، به‌طوری‌که a در رابطه با b نباشد؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

- ۸۴ -  $p$  یک ویژگی است که برخی اعداد طبیعی آن را دارند. به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، اگر  $n$  دارای ویژگی  $p$  باشد، آنگاه  $n + 2$  نیز دارای ویژگی  $p$  است. کدام گزاره یا گزاره‌ها درست است؟
- الف - اگر دو عدد طبیعی متوالی ویژگی  $p$  را داشته باشند، به جز حداکثر متناهی عدد طبیعی، سایر اعداد طبیعی ویژگی  $p$  را دارند.
- ب - اگر یک عدد فرد طبیعی و یک عدد زوج طبیعی ویژگی  $p$  را داشته باشند، به جز حداکثر متناهی عدد طبیعی، سایر اعداد طبیعی ویژگی  $p$  را دارند.

(۱) فقط «الف» (۲) فقط «ب»

(۳) هم «الف» و هم «ب» (۴) نه «الف» و نه «ب»

- ۸۵ - چه تعداد از موارد زیر، تعریف یک درخت است؟

- الف - هر گراف همبند که تعداد یال‌های آن، یک واحد کمتر از تعداد رأس‌های آن است.
- ب - هر گراف بدون دور که تعداد یال‌های آن، یک واحد کمتر از تعداد رأس‌های آن است.
- ج - هر گراف همبند و بدون دور درخت است.

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

- ۸۶ - به چند طریق می‌توان ۵ مهره سفید غیر یکسان و ۶ مهره سیاه یکسان را در یک ردیف چید؟

$$(1) \frac{11!}{5! \times 6!}$$

$$(2) \frac{11!}{6!}$$

$$(3) \frac{11!}{5!}$$

$$(4) 11!$$

- ۸۷ - چند تابع مانند  $f: \{1, 2, \dots, 1404\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 1404\}$  به طوری که برای هر  $n \in \{1, 2, \dots, 1404\}$  و  $f(n) \neq n$  و  $f(f(n)) = n$  وجود دارد؟

$$(1) \frac{1404!}{3^{468} \times 468!}$$

$$(2) \frac{1404!}{(3!)^{468} \times 468!}$$

$$(3) \frac{1404!}{(3!)^{468}}$$

$$(4) \frac{1404!}{3^{468}}$$

- ۸۸- گراف  $G$  چنین تعریف شده است: مجموعه رأس‌های  $G$  عبارت است از نقاطی مانند  $(x, y, z)$  در  $\mathbb{R}^3$  به طوری که  $x$  و  $y$  و  $z$  اعداد طبیعی هستند و  $x + y + z = 100$ . همچنین بین هر دو رأس متمایز  $(x_1, y_1, z_1)$  و  $(x_2, y_2, z_2)$  یال وجود دارد اگر و تنها اگر  $x_1 = x_2$  یا  $y_1 = y_2$  یا  $z_1 = z_2$ . کدام گزاره یا گزاره‌ها درست است؟
- الف -  $G$  منتظم است (گراف منتظم، یعنی گرافی که درجه همه رأس‌های آن یکسان است).
- ب -  $G$  دارای ۴۰ رأس است، به طوری که میان هیچ دو تایی از آن‌ها یال وجود ندارد.

(۱) فقط «الف»

(۲) فقط «ب»

(۳) هم «الف» و هم «ب»

(۴) نه «الف» و نه «ب»

- ۸۹- ۷ توپ در ۷ اندازه مختلف داریم. رنگ هر توپ یا زرد یا آبی یا قرمز است. تعداد حالات انتخاب ۲ توپ به طوری که همرنگ باشند را  $n$  می‌نامیم.  $n$  کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

(۱) ۸

(۲) ۷

(۳) ۶

(۴) ۵

- ۹۰- فرض کنید  $A$  مجموعه‌ای از اعداد ۱۲ رقمی مانند  $x$  باشد، که ارقام  $x$  فقط ۳ و ۵ بوده و مجموع ارقام  $x$  مضرب ۳ باشد. یکان  $n(A)$  کدام است؟ ( $n(A)$  تعداد عناصر مجموعه  $A$  است).

(۱) صفر

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) ۶